ENS ULM SEVRES 84

Groupe B

MATHÉMATIQUES

Notations :

I toutes les applications identiques et matrices unités,

E et S espaces vectoriels réels de dimensions finies,

$\mathfrak{L}(E)$ et $\mathfrak{L}(S)$ algèbres des endomorphismes de E et de S.

On n'écrira pas le symbole du produit dans $\mathfrak{L}(E)$ ou $\mathfrak{L}(S)$ (composition des endomorphismes).

Un automorphisme de la structure d'algèbre de $\mathfrak{L}(S)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{L}(S)$ tel que $\varphi(\lambda\lambda') = \varphi(\lambda)\,\varphi(\lambda')$ pour tous λ et λ' dans $\mathfrak{L}(S)$.

I

1° Soient φ un automorphisme de l'algèbre $\mathfrak{L}(S)$, s un élément non nul de S et s^* un élément non nul du dual S^*. Pour tout vecteur $v \in S$, on note μ_v l'application $u \in S \longmapsto \mu_v(u) = (s^*(u))\,v \in S$. On note θ l'application

$$v \in S \longmapsto \theta(v) = (\varphi(\mu_v))(s) \in S.$$

Montrer qu'on a $\varphi(\lambda)\,\theta = \theta\,\lambda$ pour tout λ dans $\mathfrak{L}(S)$. En déduire que, si θ n'est pas identiquement nul, c'est un isomorphisme de S sur S. Montrer qu'on peut choisir s de sorte que θ soit non nul.

2° Une partie $\mathcal{G}$ de l'algèbre $\mathfrak{L}(S)$ est dite génératrice si l'ensemble des produits d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{G}$ est un système de générateurs de l'espace vectoriel $\mathfrak{L}(S)$. Soit $\mathcal{G}$ une partie génératrice : montrer qu'un élément ν de $\mathfrak{L}(S)$ tel que $\lambda\nu = \nu\lambda$ pour tout λ dans $\mathcal{G}$ est de la forme $k\,I$ avec k réel.

Tournez la page S. V. P.

3° Montrer que les trois systèmes de données suivants sont équivalents :

$(\mathcal{S}_1)$ { S et $\mathcal{G}$ partie génératrice de $\mathcal{L}$ (S) telle que $\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha$ soit proportionnel à I, quels que soient γ_α et γ_β dans $\mathcal{G}$.

$(\mathcal{S}_2)$ { S, E et $\gamma : x \in E \longmapsto \gamma(x) \in \mathcal{L}(S)$, application linéaire telle que $\gamma(E)$ engendre $\mathcal{L}(S)$;
$g : (x, y) \in E \times E \longmapsto g(x, y) \in \mathbb{R}$, forme bilinéaire symétrique telle que $\gamma(x)\gamma(y) + \gamma(y)\gamma(x) = 2g(x, y)\,I$ pour tous x et y dans E.

$(\mathcal{S}_3)$ { S, E et $\gamma : x \in E \longmapsto \gamma(x) \in \mathcal{L}(S)$, application linéaire telle que $\gamma(E)$ engendre $\mathcal{L}(S)$ et que $(\gamma(x))^2$ soit proportionnel à I, quel que soit x dans E.

4° *a.* Avec un système de données $(\mathcal{S}_2)$, on note $\{ e_\alpha / \alpha = 1, 2 \ldots n \}$ une base de E et on pose $\gamma_\alpha = \gamma(e_\alpha)$. Montrer que l'ensemble

$$\{ I, \gamma_{\alpha_1} \gamma_{\alpha_2} \ldots \gamma_{\alpha_p} \;/\; 1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p \leqslant n \text{ et } p = 1, 2 \ldots n \}$$

est un système de générateurs de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ (S).

b. Dans le cas où ce système de générateurs est une base, obtenir une relation entre les dimensions de E et de S et trouver toutes les applications γ satisfaisant à $(\mathcal{S}_2)$ avec S, E et g donnés.

II

1° Sur l'espace vectoriel $\bar{S} = S \times S$, d'éléments $\bar{s} = (s_1, s_2)$, on introduit les applications définies par $\rho(s_1, s_2) = (-s_1, s_2)$ et $\sigma(s_1, s_2) = (s_2, s_1)$. Pour tout λ dans $\mathcal{L}$ (S) on pose $\bar{\lambda}(s_1, s_2) = (\lambda s_1, \lambda s_2)$.

Montrer que si $\mathcal{G}$ est une partie génératrice de l'algèbre $\mathcal{L}$ (S), les réunions $\{ \rho\bar{\lambda} / \lambda \in \mathcal{G} \} \cup \{ \sigma, \rho\sigma \}$ et $\{ \rho\sigma\bar{\lambda} / \lambda \in \mathcal{G} \} \cup \{ \rho, \sigma \}$ sont toutes deux des parties génératrices de l'algèbre $\mathcal{L}$ ($\bar{S}$).

2° D'un système $(\mathcal{S}_2)$ relatif à S et E, déduire des systèmes relatifs à $S \times S$ et $E \times \mathbb{R}^2$. Préciser les formes bilinéaires symétriques obtenues sur $E \times \mathbb{R}^2$.

3° Exemple : E de dimension 4, de base $\{ e_1, e_2, e_3, e_4 \}$

$$g(e_\alpha, e_\beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta = i \text{ avec } i = 1, 2, 3 \\ -c^2 & \text{si } \alpha = \beta = 4 \text{ avec } c = 3.10^8 \end{cases}$$

a. Montrer qu'il est possible de compléter E et g en un système $(\mathcal{S}_2)$ avec $S = \mathbb{R}^4$.

b. Avec $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$, vérifier que

$$\{ I, \gamma_A, \gamma_A \gamma_B / 1 \leqslant A < B \leqslant 5 \}$$

est une base de $\mathcal{L}$ (S) et que γ est une application injective.

III

Notations :

U ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0,

$\mathcal{A} = \mathcal{L}$ (E) ou $\mathcal{L}$ (S) ou l'une des algèbres de matrices correspondantes.

1° Avec f_1 et f_2 applications dérivables de U dans $\mathcal{A}$, montrer que l'application : $u \in U \longmapsto f_1(u) f_2(u)$ est dérivable et préciser sa dérivée.

2° On note H un groupe multiplicatif contenu dans $\mathcal{A}$, h un élément de H et $\mathcal{E}_H(h)$ l'ensemble des applications f dérivables de U_f (ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0) dans H telles que $f(0) = h$, Si $f'(a)$ est la dérivée de f au point a, montrer que $\{ f'(0) / f \in \mathcal{E}_H(h) \}$ est un espace vectoriel réel isomorphe à $T(H) \equiv \{ f'(0) / f \in \mathcal{E}_H(I) \}$.

3° Dans la suite de cette partie III les données et notations sont celles de II.3°. Si L est l'ensemble des matrices A représentatives des changements de base $\tilde{A}$ tels que $g(\tilde{A}e_\alpha, \tilde{A}e_\beta) = g(e_\alpha, e_\beta)$, G la matrice d'éléments $g(e_\alpha, e_\beta)$ et $u \in U \longmapsto A(u) \in L$ une application dérivable, telle que $A(0) = I$, montrer que $A'(0)\,G$ est antisymétrique.

4° Si Λ est l'ensemble des éléments λ inversibles de $\mathcal{L}$ (S) tels que, pour tout x dans E, $\lambda\,\gamma(x)\,\lambda^{-1}$ appartienne à γ (E), montrer que la relation $\gamma(Ae_\alpha) = \lambda\,\gamma_\alpha\,\lambda^{-1}$ définit un homomorphisme $p : \lambda \longmapsto p(\lambda) = A$ du groupe Λ sur le groupe L. Quel est le noyau de cet homomorphisme ?

5° Si $u \in U \longmapsto \lambda(u) \in \Lambda$ est une application dérivable on admettra sans démonstration que les applications $u \in U \longmapsto (\lambda(u))^{-1}$ et $u \in U \longmapsto p(\lambda(u))$ sont dérivables. Montrer que l'espace vectoriel des applications

$$x \in E \longmapsto \lambda'(0)\,\gamma(x) - \gamma(x)\,\lambda'(0) \in \mathcal{L}(S)$$

pour λ décrivant $\mathcal{E}_\Lambda$ (I) est de dimension inférieure ou égale à celle de T (L).

6° *a.* En étudiant $F(u) = (I \cos u - \lambda \sin u) f(u)$ trouver toutes les solutions de l'équation différentielle $f'(u) = \lambda f(u)$ où f est une application inconnue de U dans $\mathcal{L}$ (S) telle que $f(0) = I$ et λ un élément donné de $\mathcal{L}$ (S) tel que $\lambda^2 = -I$.

b. Adapter la technique précédente au cas où λ est l'un quelconque des éléments de la base de $\mathcal{L}$ (S) considérée en II. 3° *b.*

7° Parmi les applications f construites à la question précédente, rechercher celles qui sont à valeurs dans Λ et déterminer leurs composées avec l'homomorphisme p.

8° Déduire des résultats de 3°, 5°, 7° les dimensions de T (L) et T (Λ).

IV

Les données et notations sont celles de II.3°.

1° Si M est une application deux fois différentiable de E dans $\mathcal{L}$ (S), solution de l'équation $DM + \frac{1}{2}(M + \gamma_5\,M\gamma_5^{-1}) = 0$ avec $DM = \sum_{\alpha=1}^{4} \gamma_\alpha^{-1}\,\frac{\partial M}{\partial x_\alpha}$ et $x = \sum_{\alpha=1}^{4} x_\alpha\,e_\alpha$, montrer que toutes les fonctions composantes de M pour un choix de base quelconque dans $\mathcal{L}$ (S) sont solutions d'une même équation aux dérivées partielles du second ordre obtenue à l'aide de D^2.

Tournez la page S. V. P.

2° Pour M à valeurs dans le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}$ (S) engendré par $\{\gamma_A\,\gamma_B \,/\, 1 \leqslant A < B \leqslant 5\}$, on pose

$$M = E_1\,\gamma_2\,\gamma_3 + E_2\,\gamma_3\,\gamma_1 + E_3\,\gamma_1\,\gamma_2 + \sum_{i=1}^{3} B_i\,\gamma_i\,\gamma_4 + \sum_{i=1}^{3} A_i\,\gamma_i\,\gamma_5 + V\gamma_4\,\gamma_5.$$

Quelles sont, pour les 10 fonctions E_i, B_i, A_i, V ($i = 1, 2, 3$) les relations équivalentes à $DM + \frac{1}{2}(M + \gamma_5\,M\,\gamma_5^{-1}) = 0$?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail